ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α1. σχολικό βιβλίο σελ. 98
Α2. σχολικό βιβλίο σελ. 141
Α3. σχολικό βιβλιό σελ. 280

Β.
α. Λ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ

Θέμα 2

α) $|z| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{4+\alpha^2}} = 1$ ή $|z|=1$ κύκλος με Κ(0,0) και R=1

β) $z = \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$

για $\alpha = 0$, $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$, με εικόνα το σημείο Α(0,-1)

για $\alpha = 2$, $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{1}{1} = 1$, με εικόνα το σημείο Β(1,0)

τότε $|z_1 - z_2| = (AB) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

γ) $$\left.\begin{array}{l}(z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = [(-i)^2]^{\nu} = (-1)^{\nu} \\ (-z_1)^{\nu} = (-1)^{\nu}\end{array}\right\} \Rightarrow (z_1)^{2\nu} = (-z_1)^{\nu}$$

ΘΕΜΑ 3

α. $D_f = R$

Η f είναι συνεχής στο R με $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$

στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f ΄΄(x)	-	+
f(x)	$\frown$	$\smile$

Στο $x = 0$ παρουσιάζει σημείο καμπής

β. Έχω $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Όμως $2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ όταν $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$ έχω $f(-\infty,1] = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

Άρα στο Σ.Τ. περιέχεται το 0 και f είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty,-1]$

$f(1-,1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$, $2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ με $-2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ και $2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

Άρα στο Σ.Τ. περιέχεται το 0 και f είναι γνησίως φθίνουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $(-1,1)$

και $f[1,+\infty) = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty)$ στο Σ.Τ. περιέχεται το 0 και f είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$

Οπότε τελικά έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta))$, $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

Για να βρίσκονται τα σημεία αυτά στην ευθεία $\psi = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ πρέπει οι συντεταγμένες τους να την επαληθεύουν.

Για το $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$ πρέπει: $2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta$ ισχύει

Για το $B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta))$ πρέπει: $-2(1 + \eta\mu^2\theta) = -2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2(1 + \eta\mu^2\theta) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$ ισχύει

Για το $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$ πρέπει: $-2\eta\mu^2\theta = -2\cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta$ ισχύει δ. $f(x)=\psi \Leftrightarrow x^3-3x-2\eta\mu^2\theta=-2x-2\eta\mu^2\theta$

$x^3-3x+2x=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\boxed{x=0}$ ή $x^2=1 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 1}$

Άρα $E=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\psi\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|x^3-3x-2\eta\mu^2\theta+2x+2\eta\mu^2\theta\right|dx=$

$=\int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dx \quad (1)$

Βρίσκω το πρόσημο του x^3-x

Έχω $x^3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)\geq 0$

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+
x^2-1	+	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

Άρα η (1): $E=\int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dx+\int_{0}^{1}\left|x^3-x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx=$

$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 4

α. $f(x)\cdot g(x)$ συνεχείς στο $[0,1]$ άρα και στο $[0,x]$ με $x\in[0,1]$ οπότε $f(t)\cdot g(t)$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών

Άρα το $\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt$ παραγωγίσιμο

Άρα $F'(x)=f(x)\cdot g(x)$ Ομοίως και $\int_0^x g(t)dt$ παραγωγίσιμο

Επειδή $f\uparrow$ στο $[0,1]$ για $0<x\le 1 \Leftrightarrow f(x)>f(0)>0$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$ και $g(x)>0$ στο $[0,1]$

$F'(x)=f(x)\cdot g(x)>0$

Άρα $F\uparrow$ στο $[0,1]$

Για $x>0$

$F(x)>F(0)$

$F(x)>0$

β. Για $0\le t\le x \Leftrightarrow f(0)\le f(t)\le f(x)$

$0<f(0)\le f(t)\le f(x)\Leftrightarrow 0<f(t)\le f(x)$

Επειδή $g(t)>0$ πολλαπλασιάζω με $g(t)$

$0<f(t)\cdot g(t)\le f(x)\cdot g(t)$

$f(x)\cdot g(t)-f(t)\cdot g(t)\ge 0$

Και επειδή $f(x)\cdot g(t)-f(t)\cdot g(t)$ δεν είναι ίση με 0 για κάθε $x\in(0,1]$

$\Rightarrow \int_0^x \left(f(x)\cdot g(t)-f(t)\cdot g(t)\right)dt>0$

$\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)>0$

$\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt>\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt$

$f(x)\int_0^x g(t)dt>\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt$

$f(x)\cdot G(x)>F(x)$

γ. Θεωρώ την $h(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$

(Σημείωση: Επειδή $g(x)>0 \quad \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow \int_0^x g(t)dt>0 \quad \forall x\in(0,1]$

Άρα $G(x)>0$)

Η h παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμωμων

$$\Rightarrow h'(x)=\left(\frac{F'(x)}{G(x)}\right)=\frac{F'(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot G'(x)}{(G(x))^2}=$$

$$\frac{f(x)\cdot g(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot g(x)}{(G(x))^2}=\frac{g(x)\left(f(x)\cdot G(x)-F(x)\right)}{(G(x))^2}$$

Αλλά $g(x)>0$ και

$f(x)\cdot G(x)-F(x)>0$ από (β) ερώτημα και $(G(x))^2>0$

Άρα $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$

Άρα $h\uparrow$ στο $(0,1]$

Για $x\le 1$

$h(x)\le h(1)$

$$\frac{F(x)}{G(x)}\le\frac{F(1)}{G(1)}$$

δ. Βρίσκουμε τα όρια

i.) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'L'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)}\overset{f\text{ συνεχής}}{=}f(0)$$

ii. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\etaμt^2dt}{x^5}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'L'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\etaμx^4\cdot 2x}{5x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{5}x\frac{\etaμx^4}{x^4}=\frac{2}{5}\cdot 0\cdot 1=0$$

Άρα το $$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt}{\int_0^x g(t)\cdot dt}\cdot\frac{\int_0^x \etaμt^2}{x^5}\right]=f(0)\cdot 0=0$$