ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α1. σελ. 253

Α2. σελ. 273

Β. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

α. $f'(\chi) = 2\cdot(\chi-2) > 0$ για κάθε $\chi > 2$
Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty) \Rightarrow$ η f «1-1»

β. Αφού η f «1-1» υπάρχει η αντίστροφη και έχουμε:
$\psi = f(\chi) \Leftrightarrow \psi = 2 + (\chi-2)^2$
$\Leftrightarrow (\chi-2)^2 = \psi - 2$ [πρέπει $\psi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \psi \geq 2$] $\Leftrightarrow \chi - 2 = \pm\sqrt{\psi-2}$
$\Leftrightarrow \chi = 2 \pm \quad \psi - 2$
Αλλά $\chi \geq 2 \to 2 + \quad \psi - 2 \geq 2 \Leftrightarrow \quad \psi - 2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $\psi \in R$
ή $2 - \quad \psi - 2 \geq 2 \Leftrightarrow \quad \psi - 2 \leq 0$ ισχύει μόνο για ψ=2

Άρα $f^{-1}(x) = 2 + \quad x - 2$ με Π.ο. $[2,+\infty)$

γ. Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{matrix}\psi = \chi \\ \psi = f(\chi)\end{matrix}\right| \Leftrightarrow 2 + (\chi-2)^2 = \chi$
$\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$
$\chi = 2, \quad \chi = 3$

Τα κοινά σημεία της f και της ψ = χ είναι Α(2,2) Β(3,3)

Επειδή η f γίνεται αύξουσα λόγω συμμετρίας, τα κοινά σημεία των f^{-1} και ψ = χ είναι τα Α Β

δ. Λόγω συμμετρίας, θα βρω το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της f και της ψ = χ οπότε ζητούμενο εμβαδό θα είναι το διπλάσιο.
Είναι
$f(\chi) - \chi \geq 0 \Leftrightarrow 2 + (\chi-2)^2 - \chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 5\chi + 6 \geq 0$

	2		3	
+		-		+

Άρα $E(\Omega) = \int_2^3 \left| 2 + (\chi-2)^2 - \chi \right| d\chi = \int_2^3 \left(\chi - 2 - (\chi-2)^2\right) d\chi =$

$$= \int_2^3 \left(-\chi^2 + 5\chi - 6\right) d\chi = \left[-\frac{\chi^3}{3} + 5\frac{\chi^2}{2} - 6\chi\right]_2^3$$

$= 1/6$ Το ζητούμενο εμβαδό είναι $2\cdot E(\Omega) = 1/3$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

α. i. Είναι $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2-z_3,\ \ z_2=-z_1-z_3$

Έχουμε: $|z_1-z_2|=|z_3-z_1| \Leftrightarrow |-z_2-z_3-z_2|=|z_3+z_2+z_3|$

$\Leftrightarrow |-2z_2-z_3|=|2z_3+z_2| \Leftrightarrow |2z_2+z_3|=|2z_3+z_2|$

$4z_2\bar{z}_2+2z_2\bar{z}_3+2\bar{z}_2z_3+z_3\bar{z}_3=4z_3\bar{z}_3+2\bar{z}_2z_3+2z_2\bar{z}_3+z_2\bar{z}_2$

$\rightarrow 4+1=4+1$ ισχύει

Διότι $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=z_3\overline{z_3}=1$

Ομοίως $|z_1-z_2|=|z_2-z_3| \Leftrightarrow\ z_1+z_1+z_3|=|-z_1-z_3-z_3|$

$\Leftrightarrow |2z_1+z_3|=|-z_1-2z_3| \Leftrightarrow |2z_1+z_3|=|z_1+2z_3|$

Και καταλήγουμε ότι 4+1=4+1 που ισχύει

ii. Από τριγ. Ανισότητα έχουμε:

$|z_1-z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|=1+1+2=4$

Είναι $|z_1-z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\cdot(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\le 4$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2 \le 4 \rightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 \ge -2$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2} \ge -2$

Δηλαδή $2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\ge -2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z})\ge -1$

β. Επειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ οι εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ των z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα, ανήκουν σε κύκλο με K(0,0), ρ=1 δηλαδή $C:\chi^2+\psi^2=1$

Είναι $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3| \Leftrightarrow (AB)=(\Gamma A)=(B\Gamma)$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 4

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$

α) πρέπει $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x>0$ άρα $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}<0 \Rightarrow f \;\; \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \; \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \; \sigma\tau o \; (0,+\infty)$

Έστω $A_1=(0,1)$ και $A_2=(1,+\infty)$

$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-1-(-\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right]=1-\infty=-\infty$

x	0 1	+∞
f′(x)	-	-
f(x)	↘	↘

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-\lim\limits_{x\to 1^-}(\ln x)=-\infty$

$f(A_1)=f((0,1))\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

$f(A_2)=f(1,+\infty)\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

$\acute{A}\rho\alpha \;\; f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,+\infty)$

β) Επειδή $f(A_1)=(-\infty,+\infty)$ περιέχει την τιμή 0 άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή $f\downarrow$ αυτή η ρίζα είναι μοναδική.

Επειδή $f(A_2)=(-\infty,+\infty)$ περιέχει την τιμή 0. Άρα περιέχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$. Επειδή $f\downarrow$ αυτή η ρίζα είναι μοναδική

Επομένως στο $(0,1)$ μια ακριβώς ρίζα

Στο $(1,+\infty)$ μία ακριβώς ρίζα

Άρα στο Π.Ο. $=(0,1)\cup(1,+\infty)$ δυο ακριβώς ρίζες γ) Έχουμε:

$g(x)=\ln x \quad A(a,\ln a)$

$g'(x)=\dfrac{1}{x} \quad y-g(a)=g'(a)(x-a)$ *γενική εξίσωση εφαπτομένης*

$g(a)=\ln a \quad y-\ln a=\dfrac{1}{a}x-1$

εξίσωση εφαπτομένης $y=\dfrac{1}{a}x+\ln a-1\ (\varepsilon_1)$

Επίσης:

$h(x)=e^x \quad B(\beta,e^\beta)$ *εξίσωση εφαπτομένης*

$h'(x)=e^x \quad h(\beta)=e^\beta \quad y-e^\beta=e^\beta(x-\beta)$

$h'(\beta)=e^\beta \quad y=e^\beta x-\beta e^\beta+e^\beta\ (\varepsilon_2)$

$(\varepsilon_1)\equiv(\varepsilon_2)$

πρέπει

$$\left.\begin{aligned} e^\beta=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow \beta=\ln\frac{1}{a}\Rightarrow \beta=-\ln a \\ \ln a-1=-\beta e^\beta+e^\beta \end{aligned}\right\}\Rightarrow \ln a-1=\ln a\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\Rightarrow \ln a-\ln a\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+1\Rightarrow$$

$$\ln a\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{1+a}{a}\Rightarrow \ln a\left(\frac{a-1}{a}\right)=\frac{1+a}{a}\Rightarrow \ln a-\frac{1+a}{a-1}=0 \quad ή \quad f(a)=0$$

δ) Για κάθε α>0 ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 θεωρούμε Α(α,lnα) και Β(β,e^β), με β=-lnα Από το γ) η εφαπτομένη της Cg στο Α συμπίπτει με την εφαπτομένη της C_h στο Β. όμως η f(x)=0 έχει δύο λύσεις. Συνεπώς υπάρχουν ακριβώς δυο κοινές εφαπτόμενες.