ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α.1 βιβλίο σελ. 194

Α.2 βιβλίο σελ. 280

Β. $\alpha \rightarrow$ Λάθος, $\beta \rightarrow$ Λάθος, $\gamma \rightarrow$ Σωστό, $\delta \rightarrow$ Σωστό, $\varepsilon \rightarrow$ Λάθος, στ $\rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι: $|z_1| = 3 \Rightarrow |z_1|^2 = 9 \Rightarrow z_1\overline{z_1} = 9 \Rightarrow \overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$

β. Έστω $w = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ τότε $\overline{w} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \dfrac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \dfrac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \dfrac{z_2}{z_1} + \dfrac{z_1}{z_2} = w$

Άρα $w \in R$

γ. Έχω $|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \left|\dfrac{9}{z_1} + \dfrac{9}{z_2} + \dfrac{9}{z_3}\right| =$

$$= \left|\frac{9z_2z_3 + 9z_1z_3 + 9z_1z_2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}\right| = \frac{9|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3|} = \frac{9|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} =$$

$$= \frac{9|z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3}|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f(x)=e^{\lambda x} \Rightarrow f'(x)=\lambda\cdot e^{\lambda x}>0$ αφού $\lambda>0$ άρα η f γν. αύξουσα στο R.

β. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $\psi - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ κ΄ αφού περνά από την αρχή των αξόνων θα είναι:

$$0-e^{\lambda x_0}=\lambda\cdot e^{\lambda x_0}(0-x_0)\Rightarrow -e^{\lambda x_0}=-\lambda e^{\lambda x_0}\cdot x_0\Rightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$$

Τότε (ε): $\psi-f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)$

$$\psi-e=\lambda\cdot e\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)\Rightarrow \psi=\lambda ex-e+e\Rightarrow (\varepsilon):\psi=\lambda\cdot ex$$

Το σημείο επαφής είναι $M\left(\frac{1}{\lambda},e\right)$

γ. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}|f(x)-\lambda ex|dx$

Όμως $f''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}>0$ δηλαδή η f κυρτή στο R άρα θα είναι “πάνω” από την εφαπτομένη της .

Έτσι:

$$E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}(f(x)-\lambda\cdot e\cdot x)dx=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x}-\lambda\cdot e\cdot x)dx=$$

$$\left[\frac{1}{\lambda}\cdot e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}-\left[\lambda\cdot e\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=\frac{e-2}{2\lambda}$$

δ. Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda\cdot\frac{e-2}{2}}{2+\eta\mu\lambda}=\frac{e-2}{2}\cdot\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}$

Όμως $-1\le\eta\mu\lambda\le1\Rightarrow 1\le 2+\eta\mu\lambda\le 3$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\eta\mu\lambda}\le 1$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda}{3}\le\frac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}\le\lambda$$

και επειδή $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{3}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda=+\infty$

από κριτ. παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}=+\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $2f'(x)=e^{x-f(x)}$

$$2f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}}\Rightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)}=\frac{e^x}{2}\Rightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\frac{e^x}{2}\right)'\Rightarrow e^{f(x)}=\frac{e^x}{2}+c_1$$

Για $x=0\Rightarrow 1=\frac{1}{2}+c_1\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}$ Άρα $e^{f(x)}=\frac{e^x}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$

β. Για το $\int_0^x f(x-t)dt$ Θέτουμε $\upsilon=x-t$

$t=x-\upsilon$
$dt=-d\upsilon$
$t=0\Rightarrow \upsilon=x$
$t=x\Rightarrow \upsilon=0$

οπότε $\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$

Το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\ln\left(\frac{e^0+1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu 0}=0$

γ. Είναι $h'(x)=\left(\int_{-x}^x t^{2005}\cdot f(t)dt\right)'=\left(\int_0^x t^{2005}\cdot f(t)dt\right)'-\left(\int_0^{-x} t^{2005}\cdot f(t)dt\right)'$

$=x^{2005}f(x)-(-x)^{2005}f(-x)\cdot(-x)'=x^{2005}f(x)-x^{2005}f(-x)=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-x^{2005}\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)$

$=x^{2005}\left[\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)\right]=x^{2005}\ln\left(\dfrac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{1+e^{-x}}{2}}\right)=x^{2005}\ln\left(\dfrac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$

$=x^{2005}\ln e^x=x^{2005}\cdot x\cdot\ln e=x^{2006}$

$g'(x)=\frac{1}{2007}2007\cdot x^{2006}=x^{2006}$

Άρα $h'(x)=g'(x)\Rightarrow h(x)=g(x)+c$ και με $x=0$

$h(0)=g(0)+c\Rightarrow 0=0+c\Rightarrow c=0\Rightarrow h(x)=g(x)$

δ. Η εξίσωση γράφεται $g(x)=\frac{1}{2008}$

Θεωρούμε: την $\varphi(x)=g(x)-\frac{1}{2008}=\frac{x^{2007}}{2007}-\frac{1}{2008}$

Η φ συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών και $\varphi(0)=-\frac{1}{2008}<0$,

$\varphi(1)=\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}=\frac{1}{2007\cdot 2008}>0$

Από Θ.Bolzano $\exists$ ρίζα $\rho\in(0,1)$ με $\varphi(\rho)=0$

Επειδή $\varphi'(x)=x^{2006}>0$ η φ είναι γν. αύξουσα $\to$ η ρίζα είναι μοναδική.