ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Θεωρία σελ .260 σχολικού βιβλίου
Β. Θεωρία σελ .213 σχολικού βιβλίου
Γ. α $\to$ Σ, **β** $\to$ Σ, **γ** $\to$ Λ, **δ** $\to$ Λ, **ε** $\to$ Σ

ΘΕΜΑ 2

α. $f(x) = x^2\ell nx$, $D_f = (0,+\infty)$

$f'(x) = 2x\cdot\ell nx + x^2\dfrac{1}{x} = 2x\cdot\ell nx + x = x(2\ell nx+1)$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(2\ell nx+1) \geq 0 \Leftrightarrow 2\ell nx + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ell nx \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\ell nx \geq \ell ne^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$

x	**0**	$e^{-\frac{1}{2}}$	**+∞**
f΄(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$

Στο $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ παρουσιάζει ολ. ελάχιστο που είναι

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ell ne^{-\frac{1}{2}} = e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\ell ne = \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

το σημείο $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\dfrac{1}{2e}\right)$

β. $f''(x)=\left(x(2\ell nx+1)\right)'=2\ell nx+1+x2\dfrac{1}{x}=2\ell nx+3$

$f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2\ell nx+3\ge 0 \Leftrightarrow \ell nx\ge -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \ell nx\ge \ell ne^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x\ge e^{-\frac{3}{2}}$

x	**0** $\quad\quad$ $e^{-\frac{3}{2}}$	**+∞**
f΄΄(x)	**-** $\quad$ 0	**+**
f (x)	∩	∪

Η f είναι κοίλη στο $(0,e^{-\frac{3}{2}}]$

Η f είναι κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}},+\infty]$

Έχουμε: $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2\ell ne^{-\frac{3}{2}}=e^{-3}\left(-\dfrac{3}{2}\right)\ell ne=\dfrac{1}{e^3}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-3}{2e^3}$

το σημείο καμπής είναι $\left(e^{-\frac{3}{2}},-\dfrac{3}{2e^3}\right)$

γ. Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,e^{-\frac{3}{2}}]$ το αντίστοιχο σύνολο τιμών

$$\lim_{x\to0^+}(x^2\ell nx)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2x}{x^4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^4}{-2x^2}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2e}$$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ έχουμε:

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2e}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2\ell nx)=+\infty$$

το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $\left[-\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$

ΘΕΜΑ 3

α. Η g συνεχής στο $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ με $g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)$

Είναι $g(0)=f(0)=0$ $\quad g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

Από Θ. Rolle $\exists \xi \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$ με $g'(\xi)=0$

$e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))=0 \Leftrightarrow f(\xi)+f'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=-f'(\xi)$

β. $I(a)=\int_{\alpha}^{0} e^x(2x^2-3x)dx=[e^x(2x^2-3x)]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0} e^x(4x-3)dx$

$=-e^{\alpha}(2\alpha^2-3\alpha)-[\ e^x(4x-3)]_{\alpha}^{0}+\int_{\alpha}^{0} e^x\cdot 4dx$

$=-e^{\alpha}(2\alpha^2-3\alpha)+3+e^{\alpha}(4\alpha-3)+4\cdot\left[e^x\right]_{\alpha}^{0}=-e^{\varepsilon}(2\alpha^2-3a+3+e^{\alpha}(4\alpha-3)+4(1-e^{\alpha})$

$=-e^{\alpha}(2\alpha^2-3a)+3+e^{\alpha}(4\alpha-3)+4-4e^{\varepsilon}$

$=-e^{\alpha}(2\alpha^2-3\alpha-4\alpha+3+4)+7$

$=e^{\alpha}(2\alpha^2-7\alpha+7)+7$

$=-e^{\alpha}(2\alpha^2-7\alpha+7)+7$

γ. $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=-\lim\limits_{\alpha\to-\infty}(e^{\alpha}\cdot 2\alpha^2+7)=-2\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\dfrac{\alpha^2}{\frac{1}{e^{\alpha}}}+7$

$=-2\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\dfrac{2\alpha}{\frac{-1}{e^{\alpha}}}+7=4\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{-1}{e^{\alpha}}}+7=-4\lim\limits_{\alpha\to-\infty}e^{\alpha}+7=7$

ΘΕΜΑ 4

α. $g(x)=\int_{1}^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0$

Επειδή η f είναι συνεχής τότε και $|z|f(t)$ συνεχής

Άρα τη $\int_{1}^{x^3}|z|f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση

Επίσης το $3\left|z+\frac{1}{2}\right|(x-1)$

Άρα $g(x)=\int_{1}^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$ παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έχουμε $g'(x)=|z|f(x^3)3x^2-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$

β. Αφού $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$ και g(1)=0, η δοσμένη ανισότητα γράφεται: $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in R$.
Έτσι όμως η g στο $x_0=1$ παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό συνεπάγεται απο θ. Fermat ότι g′(1)=0.

Όμως $g'(1)=3\cdot|z|\cdot f(1)-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|$ και επειδή f(1)=1 βρίσκουμε ότι $g'(1)=3\cdot|z|-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

Αφού g′(1)=0, έπεται $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

γ. Επειδή είναι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$, προκύπτει ότι $|z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=(z+\frac{1}{z})\cdot(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}})$

$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=z\cdot\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Leftrightarrow 0=z^2+\bar{z}^2+1 \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2+\bar{z^2}=-1 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z^2)=-1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$.

δ. Είναι
$z^2=(a+\beta\cdot i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta\cdot i$ οπότε $\mathrm{Re}(z^2)=a^2-\beta^2$ και λόγω του ερωτήματος γ έχουμε:

$$a^2-\beta^2=-\frac{1}{2}\ ή\ (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}.$$

Επειδή α>β προκύπτει ότι

$$\alpha+\beta<0,\ \text{οπότε}\ \beta<-\alpha<0.$$

Έτσι για την συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R άρα και στο [2,3] είναι:

f(2)=α>0 και f(3)=β<0, οπότε f(2)·f(3) <0.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [2,3], συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.