www.mathimatikos.edu.gr
Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικού σελ. 217

Β. Θεωρία σχολικού σελ. 247

Γ. α → Σωστό, β → Σωστό, γ → Σωστό, δ → Λάθος, ε → Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

α. w = 3α +3αβi – i (α - βi) + 4 = 3α + 3βi –αi – β + 4
=3α –β + 4 + i (3β – α)
Άρα Re(w) = 3α – β + 4 και Im(w) = 3β - α

β. Οι εικόνες του w είναι τα σημεία Μ (3α –β+4, 3β –α). Αφού ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση y = x -12 έχω:
3β – α = 3α – β + 4 -12 ⇔ 4β = 4α – 8 ⇔ β = α - 2.
Άρα τα σημεία Ν (α, β) που είναι εικόνες του z ανήκουν στην ευθεία y = x - 2

γ. Ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι εκείνος όπου η εικόνα του Κ είναι τέτοια ώστε η ΟΚ να είναι κάθετη στην ευθεία y = x – 2.
Η ευθεία ΟΚ έχει λ = - 1 και εξίσωση y = - x
Οπότε λύνουμε το σύστημα $\left.\begin{matrix} y = x-2 \\ y=-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 1, y = -1$

Άρα ο μιγαδικός είναι z =1- i

ΘΕΜΑ 3ο

α. $D_f = R$
$f\,'(x) = 5x^2 + 3x^2 +1 > 0$ Άρα f γνησίως αύξουσα στο R
$f\,''(x) = 20x^3 + 6x = 2x\,(10x^2 +3)$
$f\,''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x\,(10x^2 +3) \geq 0 \Leftrightarrow x(10x^2+3\,) \Leftrightarrow x \geq 0$
(αφού $10x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in R$)

x	-∞	0	+∞
f΄(x)	-	0	+
f(x)	⌒		⌣

Είναι κοίλη στο (-∞, ο]
Είναι κυρτή στο [0,+∞)
Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και (1 – 1) οπότε η f έχει αντίστροφη.

β. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$e^x \ge 1+x \Rightarrow e^x - x - 1 \ge 0$

Έστω $g(x) = e^x - x - 1,\ x \in R$

$g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1 \Leftrightarrow e^x \ge e^0 \Leftrightarrow x \ge 0$

x	**-∞**	**0**	**+∞**
g΄(x)	**-**	**0**	**+**
g(x)	↘	**ελάχιστο**	↗

Ελάχιστη τιμή $g(0) = 0$ Άρα $g(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1+x$ για κάθε $x \in R$)

Οπότε για $e^x \ge 1+x \Rightarrow f(e^x) \ge f(1+x)$ αφού f γνησίως αύξουσα.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο O(0,0) είναι:

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0 = 1x \Leftrightarrow y = x$

που είναι ο άξονας συμμετρίας των f και f^{-1}

δ. $E = \int_0^3 |f^{-1}(x)|dx$

Έστω $f^{-1}(x) = u \Rightarrow f(u) = x \Rightarrow f'(u) \cdot du = dx$

αν x= 0 το $f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$

αν x = 3 το $f(u) = 3 \Rightarrow u^5 + u^3 + u = 3 \Rightarrow u^5 + u^3 + u - 3 = 0$

προφανώς ρίζα η u = 1 που είναι μοναδική γιατί η $u^5 + u^3 + u - 3 = 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

$$\text{Άρα: } E = \int_0^1 |u| \cdot f'(u)du = \int_0^1 u(5u^4 + 3u^2 + 1)du = \int_0^1 (5u^5 + 3u^3 + u)du = \frac{25}{12}$$

www.mathimatikos.edu.gr
Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η f συνεχής στο [γ, δ] αφού είναι συνεχής στο [α, β]
$f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$

Ισχύει το θεώρημα Bolzano δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\gamma, \delta)$ άρα και στο(α, β) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

β. Επειδή $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, από θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_1)$ = μέγιστο, $f(x_2)$ = ελάχιστο και αφού η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο θα είναι $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$
Άρα από Θ. Fermat θα είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, x_1]$, υπάρχει $\rho_1 \in (\alpha, x_1)$ με

$$f'(\rho_1) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{f(x_1)}{x_1 - \alpha} > 0$$

Από Θ.Μ.Τ. για την f ΄ στο $[\rho_1, x_1]$, υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, x_1)$ με

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_1) - f'(\rho_1)}{x_1 - \rho_1} = \frac{f'(\rho_1)}{x_1 - \rho_1} < 0$$

Ομοίως από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, x_2]$, υπάρχει $\rho_2 \in (\alpha, x_2)$με

$$f'(\rho_2) = \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha} = \frac{f(x_2)}{x_2 - \alpha} < 0$$

Από Θ.Μ.Τ. για την f ΄ στο $[\rho_2, x_2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, x_2)$ ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_2) - f'(\rho_2)}{x_2 - \rho_2} = -\frac{f'(\rho_2)}{x_2 - \rho_2} > 0$$

γ. Αφού f ΄συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$: $f''(\xi) = 0$

Άρα η f ΄΄μηδενίζεται στο ξ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ οπότε το $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής.

www.mathimatikos.edu.gr