ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σελ.334 – 335

Β.1. Θεωρία σελ. 225

Β.2. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3) + f(8) + f(3) + f(18) = i^3z + i^8z + i^{13}z + i^{18}z = -iz + z + iz - z = 0$

β. $f(13) = i^{13}z = \mathrm{I}z = i\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) =$

$$= \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$$

γ. Οι κορυφές είναι O(0,0), A(z), (iz). Ο iz στρέφει κατά 90^o τη διανυσματική ακτίνα του z

Δηλ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ B

Άρα: $E = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}|z|\cdot|iz| = \frac{1}{2}2\cdot 2 = 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση έχω $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$
$(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$ και επειδή fog είναι '1-1' θα έχω $x_1 = x_2$

β. $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$
$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1$
$x^3 - 3x + 1 = 0$

Έστω $h(x) = x^3-3x+1$ με πεδίο ορισμού το R
Έχω $h'(x) = 3x^3-3=3(x^2-1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
h΄(x)	+	-	+	
h(x)	↗	↘	↗	

Στο $(-\infty, -1]$ η h συνεχής και γνησίως αύξουσα.
Το σύνολο τιμών είναι $(\lim_{x\to-\infty} h(x), h(-1)] = (-\infty, 3]$

Άρα υπάρχει μοναδική αρνητική ρίζα στο $(-\infty, -1]$
Στο $(-1, 1]$ η h συνεχείς και γνησίως φθίνουσα
Το σύνολο τιμών είναι $[h(1), h(-1)] = [-1, 3]$
Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα στο $[-1,1]$
Όμως h συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνιμική
$h(0) =1$
$h(1) = -3$

Οπότε $h(0)\cdot h(1) = -3 < 0$
Άρα ισχύει το θεώρημα του Bolzano δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ τέτοια ώστε $h(x_0) = 0$.
Τελικά υπάρχει μοναδική θετική ρίζα στο $[-1, 1]$

Στο $[1, +\infty)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Το σύνολο τιμών είναι $[h(1). \lim_{x\to+\infty} h(x)] = [-1, +\infty)$.
Άρα υπάρχει μοναδική θετική ρίζα στο $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$\varphi(x) = h(x) - g(x) \quad x\in [α, β]$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[α, β]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή είναι $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [α,β]$ προκύπτει ότι

$Φ(x) > 0$ για κάθε $x \in [α,β]$.

έχουμε: $\int_a^β \varphi(x)\,dx > 0$ ή $\int_a^β (h(x) - g(x))\,dx > 0$ ή $\int_a^β f(x)dx - \int_a^β g(x)dx > 0$

Άρα $\int_a^β h(x)\,dx > \int_a^β g(x)\,dx$.

β.i.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R έχουμε:

f (x) - $e^{-f(x)}$ (-f(x) = 1 ή

f (x) + f (x) $e^{-f(x)}$ = 1 ή

f (x) [1 + $e^{-f(x)}$] = 1 ή

$f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$, αφού 1 + $e^{-f(x)} \neq 0$ για κάθε x $\in$ R

Άρα $f'(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^{f(x)}}}=\dfrac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}+1}$ με x $\in$ R.

β.ii.

Επειδή είναι f(0) = 0 η ζητούμενη ανίσωση

$\dfrac{x}{2}$ < f(x) < x f (x) για x > 0 γράφεται:

$\dfrac{x}{2}$ < f(x) -f(0) < x f (x) ή $\dfrac{1}{2}<\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}<f'(x)$.

Η f στο [0,x] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ $\in$ (0,x): $f'(\ )=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Τότε όμως αρκεί να δειχθεί

$\dfrac{1}{2}<f'(x)<f'(x)$ ή

$\dfrac{e^{f(0)}}{1+e^{f(0)}}<f'(x)<f'(x)$ ή

f (0) < f (ξ) < f (x), με 0 < ξ < x.

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στο [0, x].

Υπολογίζοντας την f΄΄(x) έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right)'=\frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot(1+e^{f(x)})-e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}=\frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{f(x)}\cdot\dfrac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}=\frac{e^{2f(x)}}{\left[1+e^{f(x)}\right]^3}>0 \quad \text{για κάθε } x\in R.$$

Άρα f΄γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο [0,x].

β.iii.

Από β.ii. είναι $f(x) > \frac{x}{2} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R άρα και στο [0,1], θα είναι $E = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Οι συναρτήσεις $\frac{x}{2}$, $f(x)$, $xf'(x)$ είναι συνεχείς στο R, οπότε με βάση το ερώτημα α) από $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ είναι:

$$\int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E.$$

Έτσι $\frac{1}{4} < E$ και $2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2}f(1)$.

Άρα $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$.