ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία 2.3 σχολικού βιβλίου.

Α2. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

Β1. 1. ζ
2. γ
3. α
4. δ
5. β

Β2. $|z| = 1$ άρα $|z|^2 = 1$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f συνεχής στο $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$ ως πολυωνυμική και πηλίκο συνεχών συναρτήσεων αντίστοιχα.
Η f είναι συνεχής και στο 3 αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \alpha x^2 = 9\alpha = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1-e^{x-3}}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3^+}(-e^{x-3}) = -e^0 = -1$$

Έτσι $9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$

β. Για $x > 3$, $f'(x) = \dfrac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2}$

$$f(4) = \frac{1-e}{1} = 1-e, \quad f'(4) = \frac{-e-1+e}{1^2} = -1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Α(4, f(4)) είναι:

ε: $y - (1 - e) = -(x - 4) \Leftrightarrow y = -x + 5 - e$

γ. Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) = -\frac{1}{9}x^2$

Δηλαδή $f(x) \leq 0$, $x \in [1, 2]$. Επίσης f συνεχής στο [1, 2] οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\varepsilon(\Omega) = \int_1^2 (-f(x)dx) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{27}(8-1) = \frac{7}{27} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ (1)

$\beta^2 < 3\gamma$

Τα 2 μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε από την (1) έχουμε:

$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta f(x) \cdot f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$ ή

$(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$ (2),

Είναι: $3x^2 - 4x + 6 > 0, \quad x \in \mathbb{R}$

Αφού η διακρίνουσα του Δ είναι: $\Delta = -56 < 0$ και

$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0, \quad x \in \mathbb{R}$

αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς f(x) είναι: $\Delta_1 = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$

α. Από τη (2) έχουμε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

β. Από τη (2) έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1), άρα η f(x) έχει το πολύ μια ρίζα στο (0, 1) (3)

Από την (1) για x = 0 έχουμε:

$f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow$
$f(0)(f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0)) = -1$

Για το τριώνυμο $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma$ ως προς f(x) έχουμε διακρίνουσα $\beta^2 - 4\gamma < 0$ (διότι $0 \leq \beta^2 < 3\gamma$ και άρα $\beta^2 - 4\gamma < -\gamma < 0$).

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\quad f^2(x) + \beta f(x) + \gamma > 0$

Άρα $\quad f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$

Οπότε: $f(0) < 0$. Επίσης από (1) για x = 1 έχουμε:

$f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + \beta f(1) + \gamma) = 4$

και επειδή $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$ προκύπτει $f(1) > 0$

Η f είναι συνεχής στο [0, 1] και f(0)f(1) < 0
Από το Θ. Bolzano συμπεραίνουμε ότι η f(x) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)
(4)
Από (3) και (4) προκύπτει πως η f(x) έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

ΘΕΜΑ 4ο

α) Θέτουμε x t = u και διαφορίζουμε ως προς t.
Έτσι έχουμε d(x t) = du ή x dt = du

Ακόμα για

- t = 0 έχουμε u = 0 και
- t = 1 έχουμε u = x.

Άρα:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^1 x^2 t f^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^x u f^2(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής , προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$\int_0^x u f^2(u)du$$

είναι παραγωγίσιμη στο . Άρα: $f'(x) = -2x f^2(x)$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο με:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - x^2\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \overset{(a)}{=}$$

$$= -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = +2x - 2x = 0$$

για κάθε x ∈ . Επομένως η g(x) σταθερή.

γ)

Επειδή η συνάρτηση g είναι σταθερή δηλαδή g(x) = c για κάθε x , θα είναι για x = 0: g(0) = c.

Ακόμα:

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} - 0^2 = \frac{1}{f(0)}$$

οπότε:

$$\frac{1}{f(0)}=c$$

Από την (ii) για x = 0 έχουμε f(0) = 1.

Επομένως: c = 1.

Άρα: g(x) = 1 και λόγω της:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$$

προκύπτει:

$$1=\frac{1}{f(x)}-x^2 \Leftrightarrow 1+x^2=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

δ)

$$x\cdot f(x)\cdot \eta\mu 2x = x\cdot\frac{1}{1+x^2}\eta\mu 2x=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x,$$

Έχουμε:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\left|\eta\mu 2x\right|\le\left|\frac{x}{1+x^2}\right|$$

Άρα

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right|\le\left|\frac{x}{1+x^2}\right|,$$

$$-\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\le\left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right)\le\left|\frac{x}{1+x^2}\right|,$$

Όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\left|\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}\right|=0$$

με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right)=0$$