Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης

Γ' Λυκείου

Δευτέρα 28 Μαΐου 2012

<u>Θέμα Α</u>

Α1. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.253)

Α2. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.191)

Α3. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.258)

Α4. (α) **Σ** (β) **Σ** (γ) **Λ** (δ) **Λ** (ε) **Λ**

<u>Θέμα Β</u>

Β1. $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \overset{z=x+yi}{\Longleftrightarrow} |x+yi-1|^2+|x+yi+1|^2=4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Β2. $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-(z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2)=2 \overset{|z_1|=|z_2|=1}{\Longleftrightarrow} (z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2)=0$$

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2=$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2=1+1=2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{2}$

B3. $|w-5\overline{w}|=12 \xRightarrow{z=x+yi} |x+yi-5(x-yi)|=12 \Rightarrow |-4x+6yi|=12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 16x^2+36y^2=144 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

B3. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||z|-|-w|\big| \leq |z+(-w)| \leq |z|+|-w| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big|1-|-w|\big| \leq |z-w| \leq 1+|-w|$$

για τον w έχουμε ότι $|w|_{max}=3$ και $|w|_{min}=2$

άρα $1+|w| \leq 1+|w|_{max}=4$

και $\big|1-|w|\big| \geq \big|1-|w|_{min}\big|=1$

Από τις δυο προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι

$$1 \leq |z-w| \leq 4$$

Θέμα Γ

Γ1. $f'(x)=(x-1)'lnx+(x-1)\frac{1}{x}=lnx+1-\frac{1}{x}, \quad x>0$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow lnx+1-\frac{1}{x}=0$$

μια προφανή ρίζα της παραπάνω εξίσωσης είναι x=1.

$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$$

Επειδή η δεύτερη παράγωγος είναι θετική συνεπάγεται ότι η πρώτη παράγωγος θα είναι γν. αύξουσα επομένως η χ=1 θα είναι μοναδική ρίζα. Έτσι είμαστε σε θέση να φτιάξουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών από τον οποίο μπορεί να προκύψει το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

x	**0**	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

$$f(1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [(x-1)lnx - 1] = +\infty$$

και

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [(x-1)lnx - 1] = +\infty$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $[-1, +\infty]$

Γ2. Έχουμε

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)lnx = 2013 \Leftrightarrow (x-1)lnx - 1 = 2012 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (1)$$

Λόγω όμως του παραπάνω πίνακα μεταβολών που περιγράφει την συμπεριφορά της συνεχούς f συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) θα έχει δυο ρίζες ακριβώς, η πρώτη x_1 θα είναι στο διάστημα (0,1) και η δεύτερη x_2 στο $(1, +\infty)$.

Γ3. $f(x_1) = f(x_2) = 2012$

Έστω $h(x) = e^x \cdot f(x) - 2012e^x = e^x(f(x) - 2012)$

Τότε θα ισχύουν τα παρακάτω

$$h(x_1) = e^{x_1}(f(x_1) - 2012) = 0$$

$$h(x_2) = e^{x_2}(f(x_2) - 2012) = 0$$

και σύμφωνα με το Θ.Rolle θα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \cdot f(x_0) + e^{x_0} \cdot f'(x_0) - 2012e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) + f^{'}(x_0) = 2012$$

Γ4. Έστω $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)lnx = 0 \Rightarrow x = 1$

$$E = \int_1^e |g(x)|dx = \int_1^e (x-1)lnxdx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' lnxdx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) lnx\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\frac{1}{x}dx = \left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \left[\left(\frac{x^2}{4} - x\right)\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x - x^2}{e} \quad , x \in (0, +\infty)$$

$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt = H(x^2 - x + 1)$, με $H(x) = \int_1^x f(t)dt$

η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Ακόμη η $H(x^2-x+1)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η G είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων με $G'(x)=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{1}{e}(1-2x)$, $x\in(0,+\infty)$

Επίσης έχουμε ότι $G(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και

$$G(1)=\int_1^1 f(t)dt-\frac{1-1^2}{e}=0$$

άρα $G(x)\geq G(1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat

$G'(1)=f(1)+\frac{1}{e}=0\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$

Έχουμε ότι $f(x)\neq 0$, συνεχής με σταθερό πρόσημο , $f(1)=-\frac{1}{e}$. Επομένως $f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$$lnx-x=-\left(\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt+e\right)|f(x)|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow lnx-x=-\left(\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt+e\right)(-f(x))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{lnx-x}{f(x)}=\left(\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt+e\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{lnx-x}{\int_1^x\frac{lnt-t}{f(t)}dt+e}$$

Έστω $g(x) = \int_1^x \frac{lnt-t}{f(t)}dt$, $x \in (0, +\infty)$

$$g'(x) = g(x) + e \Leftrightarrow g'(x) - g(x) = e \Leftrightarrow e^{-x}g'(x) - e^{-x}g(x) = e^{1-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x}g(x)\right)' = (-e^{1-x})' \Leftrightarrow e^{-x}g(x) = -e^{1-x} + c$$

Για x=1 θα έχουμε $e^{-1}g(1) = -e^{1-1} + c \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$

επομένως έχουμε $e^{-x}g(x) = -e^{1-x} + 1 \Leftrightarrow g(x) = e^{x} - e \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{lnt - t}{f(t)}dt = e^{x} - e$$

και με παραγώγιση της παραπάνω σχέσης θα έχουμε

$$\frac{lnx-x}{f(x)} = e^{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(lnx - x) \text{ , } x \in (0, +\infty)$$

Δ2.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[e^{x}(lnx - x)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)] = \lim_{x\to 0^+}(f(x))^2(\eta\mu\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}) =$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{(f(x))^2}}\right) \overset{u=\frac{1}{f(x)}}{\cong} \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu u-u}{(u)^2}\right) \overset{DLH}{\cong} \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = 0$$

Δ3. F συνεχής$\Longrightarrow \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη

$$F'(x) = f(x)$$

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(lnx - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) =$$

$$= e^{-x}\left(-lnx + x + \frac{1}{x} - 1\right)$$

$$lnx \leq x - 1 \Leftrightarrow -lnx + x - 1 \geq 0$$

και επειδή $\frac{1}{x} > 0$, $e^{-x} > 0$

έχουμε $F''(x) > 0$ άρα F κυρτή στο $(0, +\infty)$.

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x) \Leftrightarrow F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} > \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x}, \qquad x \in (0, +\infty)$$

Από Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$ προκύπτει ότι θα υπάρχουν

$\xi_1 \in [x, 2x]$ και $\xi_2 \in [2x, 3x]$ τέτοια ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$ και

$F'(\xi_2) = \frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $F'(\xi_2) > F'(\xi_1)$ με $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$

, το οποίο όμως ισχύει διότι η F' είναι γν.αυξουσα ($F''(x) > 0$)

Δ4. Έστω η συνάρτηση $u(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta),\ x \in [\beta, 2\beta]$

Η u είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ διότι η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα.

$$u(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$$

$$u(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta)$$

Ακόμη έχουμε ότι η F είναι γν.φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ διότι $F'(x) = f(x) < 0$.

Επομένως για $\beta < 3\beta \Rightarrow F(\beta) > F(3\beta) \Leftrightarrow F(\beta) - F(3\beta) > 0 \Leftrightarrow u(\beta) > 0$

Επίσης $u(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$

Δηλαδή έχουμε ότι $u(\beta) \cdot u(2\beta) < 0$ και από το Θ.Bolzano θα υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$, τέτοιο ώστε $u(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$$

Η μοναδικότητα του ξ προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση u είναι γν.μονότονη δηλ. 1-1 και $u'(x) = F'(x) = f(x) < 0$