Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης

Γ' Λυκείου

Δευτέρα 16 Μαΐου 2011

Θέμα Α

Α1. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.260)

Α2. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.280)

Α3. (α) **Σ** (β) **Σ** (γ) **Λ** (δ) **Λ** (ε) **Σ**

Θέμα Β

Β1. Έχουμε ότι $|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=1.

Β2. Έχουμε $|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z-3i})=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i} \quad , \qquad z \neq 3i$$

Β3. $w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2Re(z)\in\mathbb{R}$

Εφόσον ο z ανήκει σε κύκλο με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα 1 , για το πραγματικό του μέρος θα ισχύει $-1<Re(z)<1 \Leftrightarrow -2<2Re(z)<2 \Leftrightarrow -2<w<2$

Β4. $|z-w| = \left|z - z + 3i - \frac{1}{z-3i}\right| = \left|3i - \frac{1}{z-3i}\right| = |3i - \bar{z} - 3i| = |-\bar{z}| = |z|$

Θέμα Γ

Γ1. $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = (xf'(x))' \Leftrightarrow (e^x f'(x) - e^x)' = (xf'(x))'$

επομένως $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c$

και αντικαθιστώντας χ=0 βρίσκουμε ότι c=-1

Άρα $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1$ (1)

θέτουμε $g(x) = e^x - x$ με $g'(x) = e^x - 1$ και φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Επειδή η g παρουσιάζει στο χ=0 ελάχιστο θα ισχύει $g(x) \geq g(0) = 1 > 0$

Επομένως $g(x) = e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και από την παραπάνω σχέση (1) θα έχουμε

$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln(e^x - x))' \Rightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c$

και αντικαθιστώντας χ=0 βρίσκουμε ότι c=0.

Επομένως $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Έχουμε ότι $f'(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$, επομένως μπορούμε εύκολα να φτιάξουμε τον πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Επειδή η f παρουσιάζει στο χ=0 ελάχιστο θα ισχύει $f(x) \geq f(0) = 0$

Γ3. $f''(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$

Έστω $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$ τότε $h'(x) = -xe^x + 2e^x - e^x = e^x(1-x)$

και ο πίνακας μεταβολών της h είναι

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	–
$h(x)$	↗		↘

Επειδή η h παρουσιάζει στο χ=1 μέγιστο θα ισχύει $h(x) \leq h(1) = e - 1$

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης τόσο στο $-\infty$ όσο και στο $+\infty$ προκειμένου να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης h.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^x + 2e^x - 1) = -1$$

διότι $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(-xe^x + 2e^x - 1) = \lim_{x\to+\infty}(e^x(-x+2) - 1) = -\infty$$

Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολής της συνεχούς h, την συμπεριφορά της h στο $\pm\infty$, ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι θετικος αριθμός και αριστερά – δεξιά από το χ=1 είναι γνησίως μονότονη συμπεραίνουμε ότι η h θα έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες, όπου εκατέρωθεν αλλάζει το πρόσημο της. Η μία από αυτές θα ανήκει στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και η άλλη στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Επομένως το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου συνάρτησης της f εξαρτάται από το πρόσημο της h , εύκολα εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η f έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής στα σημεία μηδενισμού της h.

Γ4. Έστω η συνάρτηση $w(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $w(0) = -1$ και $w\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} =$

$$= f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano και εφόσον $w(0) \cdot w\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. Επιπλέον για τη συνάρτηση w έχουμε

$w'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x = f'(x) + \eta\mu\chi > 0$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

διότι $f'(x) > 0$ και $\eta\mu\chi > 0$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Επομένως η W είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Θέμα Δ

Δ1. Θέτουμε $x + t = u$ και έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

$t = u - x$, $dt = du$, για $t = 0 \Rightarrow u = x$, για $t = -x \Rightarrow u = 0$

$$\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{e^{2x} g(u)} du =$$

$$= -\frac{1}{e^{2x}} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

Επομένως $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = -\frac{1}{e^{2x}} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1 - f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

και με ανάλογο τρόπο προκύπτει

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

Οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο [0,x] με $x \in \mathbb{R}$, επομένως οι συναρτήσεις

$\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, απ'όπου συνεπάγεται ότι και οι συναρτήσεις f και g θα είναι και αυτές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Έτσι θα έχουμε $f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x) = e^{2x}$

και $g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)f(x) = e^{2x}$

Από τις δυο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \overset{g(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$$

Άρα $\frac{f(x)}{g(x)} = c$

Γνωρίζουμε όμως $f(0) = g(0) = 1$, έτσι $c = 1$.

Δηλαδή $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Δ2.

Επειδή $f(x) = g(x)$. Είναι $f(x)f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$

επομένως $\frac{1}{2}f^2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + 2c$

Για $x = 0$ έχουμε $f^2(0) = e^{2\cdot 0} + 2c \Leftrightarrow c = 0$

Δηλαδή $f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{e^{2x}} \overset{f(x)>0}{\Longrightarrow} f(x) = e^x$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{lne^x}{f(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \overset{u=\frac{1}{x}}{\cong} \lim_{u\to -\infty}\frac{1}{ue^u} = -\infty$$

$$\lim_{u\to -\infty} ue^u = \lim_{u\to -\infty}\frac{u}{e^{-u}} = \lim_{u\to -\infty}\frac{1}{-e^{-u}} = -\lim_{u\to -\infty} e^u = 0$$

Δ4. Το εμβαδόν δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$E = \int_0^1 |F(x)|\,dx$$

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)\,dt$$

όπου $F'(x) = f(x^2) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

και θα ισχύει $F(x) < F(1) \Leftrightarrow F(x) < 0$ για κάθε $x < 1$

Ενώ για κάθε $x \in [0,1]$ θα έχουμε $F(x) \leq 0$

Έτσι για τον εμβαδόν θα έχουμε

$$E = \int_0^1 |F(x)|\,dx = -\int_0^1 F(x)\,dx = -\int_0^1 (x)'F(x)\,dx =$$

$$= -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 x\, f(x^2)\, dx = -[xF(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)' dx =$$

$$= -F(1) + \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$