Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής

Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Τετάρτη 19 Μαΐου 2010

<u>Θέμα Α</u>

A1. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.304)

A2. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.279)

A3. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.273)

A4. (α)- Σ (β)- Σ (γ)- Λ (δ)- Λ (ε)- Σ

<u>Θέμα Β</u>

B1. Έχουμε $z+\frac{1}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 2=-4<0\ , \qquad z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4i^2}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

$$z_1=1+i\ , z_2=1-i$$

B2. $z_1{}^2+z_2{}^2=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=[(1+i)^2]^{1005}+[(1-i)^2]^{1005}=$

$$=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=0$$

B3. Έχουμε $|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|2i| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι κύκλος κέντρου K(4,-3) και ακτίνας ρ=2.

B4. Επειδη ο γ.τ. των εικόνων των εικόνων του w βρίσκονται πάνω στον κύκλο κέντρου K(4,-3) και ακτίνας ρ=2 θα έχουμε ότι $(OK)-\rho \leq |w| \leq (OK)+\rho$ (βλ.εφαρμογή 2 σχ.βιβλίου σελ.99-100) με

$$(OK)=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

Δηλαδή $(OK)-\rho \leq |w| \leq (OK)+\rho \Leftrightarrow 5-2 \leq |w| \leq 5+2 \Leftrightarrow 3 \leq |w| \leq 7$

Θέμα Γ

Γ1. Για την συνάρτηση f έχουμε ότι ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με πρώτη παράγωγο

$$f'(x)=2+\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}>0 \text{ για κάθε } \chi\epsilon\mathbb{R}.$$

Επομένως η f είναι γν.αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$

Γ2. $2(\chi^2-3\chi+2)=\ln\left(\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\chi^2-2(3\chi-2)=\ln((3x-2)^2+1)-\ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\chi^2+ln(x^4+1)=2(3\chi-2)+\ln((3x-2)^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\chi^2)=f(3\chi-2)\ \ (1)$$

Από το ερώτημα Γ1 έχουμε ότι η f είναι γν.αύξουσα άρα και 1-1 επομένως από την σχέση (1) προκύπτει ότι $\chi^2=3\chi-2 \Leftrightarrow \chi^2-3\chi+2=0 \Leftrightarrow \chi=1$ ή $\chi=2$

Γ3. $f''(x) = \left(\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+x+1)'\,(x^2+1)-2(x^2+x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } \chi = -1$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		-		+		-	
$f(x)$							

Απο τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f έχει δυο σημεία καμπής τα

$(-1, ln2-2)$ και $(1, ln2+2)$

Έστω (ε_1) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(-1, ln2-2)$

$$\varepsilon_1 : y-(ln2-2) = f'(-1)(x+1)$$

με $f'(-1) = \frac{2(1-1+1)}{1+1} = 1$

άρα $\varepsilon_1 : y = \chi + ln2 - 1$

Έστω (ε_2) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, ln2+2)$

$$\varepsilon_1 : y-(ln2+2) = f'(1)(x-1)$$

με $f'(1) = \frac{2(1+1+1)}{1+1} = 3$

άρα $\varepsilon_2 : y = 3\chi + ln2 - 1$

Επομένως το σημείο τομής των δυο ευθειών θα προκύψει από την επίλυση του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{cases} y = \chi + ln2 - 1 \\ y = 3\chi + ln2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi + ln2 - 1 = \chi + ln2 - 1 \\ y = 3\chi + ln2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 \\ y = ln2 - 1 \end{cases}$$

το οποίο είναι το $(0, ln2 - 1)$ και βρίσκεται στο άξονα ψ'ψ .

Γ4.

$$I = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} x\,[2x + \ln(x^2+1)]dx = \int_{-1}^{1} [2x^2 + x\ln(x^2+1)]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x^2 dx + \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+1)'\ln(x^2+1)\,dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+1)[\ln(x^2+1)]'\,dx =$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{2}(2ln2 - 2ln2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+1)\,\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}dx =$$

$$= \frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2xdx = \frac{4}{3} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση $h(t)=\frac{t}{f(t)-t}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το ℝ διότι $f(t)\neq t$ και είναι επίσης συνεχής σε όλο το ℝ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων επομένως η συνάρτηση f με

$$f(x)=\int_0^x h(t)dt+x+3$$

θα είναι παραγωγίσιμη στο ℝ με

$$f'(x)=\left(\int_0^x h(t)dt+x+3\right)'=\left(\int_0^x h(t)dt\right)'+1=h(x)+1=\frac{x}{f(x)-x}+1=$$

$$=\frac{x+f(x)-x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}\,,\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ2. $g'(x)=\left[\left(f(x)\right)^2-2xf(x)\right]'=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=$

$$=2f'(x)(f(x)-x)-2f(x)=2\frac{f(x)}{f(x)-x}(f(x)-x)-2f(x)=0\,,\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

άρα $g(x)=c$

Δ3. Απο το (Δ2) θα έχουμε ότι $g(x)=c\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^2-2xf(x)=c \quad (1)$

ενώ από την σχέση

$$f(x)=\int_0^x h(t)dt+x+3$$

για χ=0 έχουμε

$$f(0) = \int_0^0 h(t)dt + 0 + 3 = 3$$

και η σχέση (1) θα γίνει $\left(f(0)\right)^2 - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = c \Leftrightarrow 3^2 = c \Leftrightarrow c = 9$

Επομένως έχουμε ότι $\left(f(x)\right)^2 - 2xf(x) = 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δηλαδή $\left(f(x)\right)^2 - 2xf(x) + x^2 = 9 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 9 + x^2$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω η συνεχής συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f(x) - x$ και $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $\varphi(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$

θα είναι $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα από την σχέση (2) έχουμε $f(x) - x = \sqrt{9 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = \chi + \sqrt{9 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Έστω $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

με $F'(\chi) = \left(\int_0^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left(\int_0^{x+1} f(t)\,dt\right)' - \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' =$

$$= f(x+1) - f(x)\ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

Από το (Δ3) έχουμε ότι $f'(x) = \frac{2\chi}{2\sqrt{9+x^2}} + 1 = \frac{2\chi + 2\sqrt{9+x^2}}{2\sqrt{9+x^2}} > \frac{\chi + \sqrt{x^2}}{\sqrt{9+x^2}} = \frac{\chi + |x|}{\sqrt{9+x^2}} \geq 0$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δηλαδή $x < x + 1 \Leftrightarrow f(\mathrm{x}) < f(\mathrm{x}+1) \Leftrightarrow f(\mathrm{x}+1) - f(\mathrm{x}) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως_ $F^{'}(\chi) = f(x+1) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, απ'όπου προκύπτει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και τελικά θα έχουμε για $x < x+1 \Leftrightarrow F(x) < F(x+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_{x}^{x+1} f(t)\,dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt \ , \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$