# Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής

# Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

# Τετάρτη 20 Μαΐου 2009

## <u>Θέμα 1ο</u>

**Α.** Θεωρία (Σχ. Βιβλίο σελ.251)

**Β.** Θεωρία (Σχ. Βιβλίο σελ.213)

**Γ.** (α)-Σ ( β)-Σ ( γ)-Λ ( δ)-Λ ( ε)-Λ

## <u>Θέμα 2ο</u>

**Α.**

**α)** Έστω $z = x + yi$ όπου $\begin{cases} \chi = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = x - 2$

**β)** Η εικόνα του $z_0$ θα είναι το σημείο τομής των ευθειών $y = x - 2$ (1)

και $y = \alpha\chi$ , οι οποίες τέμνονται κάθετα δηλαδή $\alpha * 1 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1$

άρα $y = -\chi$ (2). Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε (χ,y)=(1,-1).

Επομένως ο ζητούμενος μιγαδικός θα είναι ο $z_0 = 1 - \mathrm{i}$

**Β.** Έστω ο μιγαδικός αριθμός $w = x + yi$ τότε σύμφωνα με την σχέση της εκφώνησης θα έχουμε:

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Επομένως ο ζητούμενος μιγαδικός αριθμός θα είναι ο $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$

## Θέμα 3ο

**Α.**

Από υπόθεση έχουμε ότι $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = a^0 - ln1 = 1$

και επειδή η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο στο χ=0 και είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ θα ισχύει το θεώρημα *Fermat* και θα έχουμε $f'(0) = 0$ όπου $f^{'}(\chi) = \alpha^{\chi} lna - \frac{1}{x+1}$

$$f^{'}(0) = \alpha^0 lna - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow lna = 1 \Leftrightarrow lna = lne \Leftrightarrow a = e$$

**Β.**

**α)**

$f(x) = e^x - \ln(x+1)$ , $\quad$ $\boldsymbol{x} > -1$

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{\chi+1}$ , $\quad$ $\boldsymbol{x} > -1$

$f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(\chi+1)^2}$ , $\quad$ $\boldsymbol{x} > -1$

Επειδή $f''(x) > 0 \quad \forall\, \chi > -1$ η συνάρτηση θα είναι κυρτή στο διάστημα $(-1, +\infty)$

**β)** Εφόσον η $f$ είναι κυρτή στο διάστημα $(-1, +\infty)$, η $f'$ θα είναι γν.αύξουσα. Ακόμη ισχύει $f'(0) = e^0 - \frac{1}{0+1} = 0$ και

για χ>0 έχουμε $f'(x) > f'(0) = 0$

ενώ για χ<0 έχουμε $f'(x) < f'(0) = 0$

Επομένως η $f$ είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γν.αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

| **x** | **-1** | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

**γ)** Θα έχουμε $\frac{f(\beta)-1}{\chi-1}+\frac{f(\gamma)-1}{\chi-2}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\chi-2)(f(\beta)-1)+(\chi-1)(f(\gamma)-1)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$h(x)=(\chi-2)(f(\beta)-1)+(\chi-1)(f(\gamma)-1)$ στο διάστημα [1,2]

για την οποία ισχύουν

$h(1)=-[f(\beta)-1]<0$ $\delta\iota\acute{o}\tau\iota$ $f(\beta)>f(0)=1$

$h(2)=f(\gamma)-1>0$ $\delta\iota\acute{o}\tau\iota$ $f(\gamma)>f(0)=1$

δηλαδή $h(1)h(2)<0$ και σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $\chi_0$ τέτοιο ώστε

$h(\chi_0)=0 \Leftrightarrow (\chi_0-2)(f(\beta)-1)+(\chi_0-1)(f(\gamma)-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\beta)-1}{\chi_0-1}+\frac{f(\gamma)-1}{\chi_0-2}=0$$

## Θέμα 4ο

**α)** $\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=\frac{1}{2}$

Επομένως $G(0)=6\cdot\frac{1}{2}=3$

και $G(x)=\begin{cases}\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3 & x\in(0,2]\\ 3 & x=0\end{cases}$

Η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο [0,2] άρα η $\int_0^x f(t)dt$ θα παραγωγίζεται στο διάστημα [0,2] και η $H(\chi)=\int_0^x tf(t)dt$ θα παραγωγίζεται στο [0,2] , έτσι η G θα είναι συνεχής στο διάστημα (0,2]. Επομένως μένει να αποδείξουμε την συνέχεια στο 0.

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{H(\chi)}{\chi}=\lim_{\chi\to 0}H'(\chi)=\lim_{\chi\to 0}(\chi f(x))=0$$

$$\lim_{\chi\to 0}\int_0^x f(t)dt=0$$

και έτσι θα έχουμε $\lim_{\chi\to 0}G(\chi)=\lim_{\chi\to 0}(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3)=3$

Δηλαδή $\lim_{\chi\to 0}G(\chi)=G(0)$ , το οποίο σημαίνει ότι η G είναι συνεχής στο σημείο 0 και τελικά είναι συνεχής στο διάστημα [0,2].

**β)** Η G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,2) ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων

$$G'(x)=\left(\frac{H(x)}{x}\right)'-\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=\frac{H'(x)x-H(x)}{x^2}-f(x)=$$

$$=\frac{x^2f(x)-H(x)-x^2f(x)}{x^2}=\frac{-H(x)}{x^2}$$

**γ)** Έχουμε $G(0)=3$ και

$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=\frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3$ (1)

αλλά από την υπόθεση έχουμε $\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (tf(t)-2f(t))dt=0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt=2\int_0^2 f(t)dt$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$G(2)=\frac{2\int_0^2 f(t)dt}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=3$$

και επειδή η G είναι συνεχής στο διάστημα [0,2] ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\alpha\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $G'(a)=0 \Leftrightarrow$ $-\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0 \Leftrightarrow H(\alpha)=0$

**δ)** Σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής (G συνεχής στο [0,α] και παραγωγίσιμη στο (0,α) ) θα υπάρχει ένα ξ στο διάστημα (0,α) τέτοιο ώστε να ισχύει: $G'(\xi)=\frac{G(a)-G(0)}{a} \Leftrightarrow$ $aG'(\xi)=G(a)-3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -a\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)dt+3-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a\frac{H(\xi)}{\xi^2}=-\int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow -aH(\xi)=-\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -aH(\xi)=-\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow a\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$$