



Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής

Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Τρίτη 24 Μαΐου 2008

Θέμα 1°

- A1. Θεωρία σελ. 235 σχ. βιβλίου  
A2. Θεωρία σελ. 191 σχ. βιβλίου  
B. α. Σωστό  
β. Σωστό  
γ. Λάθος  
δ. Λάθος  
ε. Σωστό

Θέμα 2°

α) Είναι  $|i + 2\sqrt{2}| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} \cdot |z| = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{9} \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2.$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 2$

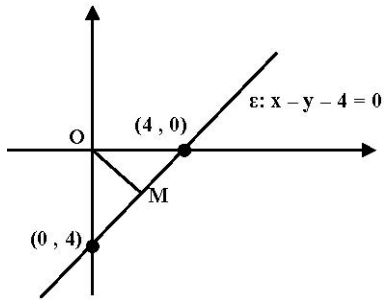
β) Έστω  $w = x + yi$  τότε θα έχω  $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$

$\Leftrightarrow |x + yi - (1 - i)| = |x + yi - (3 - 3i)|$

$\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| = |(x-3) + (y+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}$

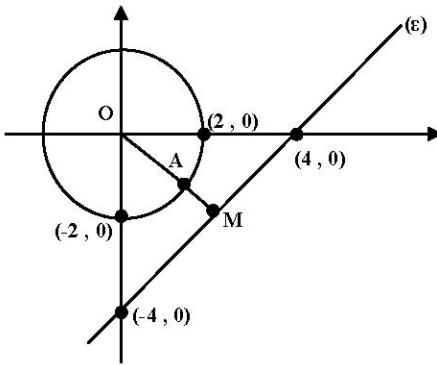
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9$

$\Leftrightarrow 4x - 16 = 4y \Leftrightarrow y = x - 4$  Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι η ευθεία  $\epsilon: y = x - 4$



γ)

$$\text{Είναται } \min|w| = d(O, \varepsilon) = \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$



δ)

$$|z - w|_{\min} = |d(O, \varepsilon) - \rho| = 2\sqrt{2} - 2$$



### ΘΕΜΑ 3ο

α) Για να είναι η συνάρτηση  $f$  συνεχής θα πρέπει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

Άρα η  $f$  συνεχής στο  $x_0=0$

β)

Για  $x > 0$ ,  $f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'(x)		-	+
f(x)		↘	↗

Η  $f$  συνεχής στο  $[0, +\infty)$

$f$  γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

$f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\left[0, \frac{1}{e}\right]$

Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_1 = \frac{1}{e}$  το

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (\ln 1 - \ln e) = -\frac{1}{e}$$

Στο  $x_2=0$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το  $f(0)=0$



Σύνολο τιμών της  $f$ :

$$\begin{aligned} f([0, +\infty)) &= f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] \cup \left[f\frac{1}{e}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) \\ &= \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) \end{aligned}$$

$$(\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty)$$

$$\text{Άρα: } f([0, +\infty)) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

$$\gamma) \quad x = e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{a}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \ln e$$

$$\Leftrightarrow x \ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a, \quad a \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Άρα: Από το σύνολο τιμών της  $f$  έχουμε:

- Αν  $a < -\frac{1}{e}$ , είναι αδύνατη η (1)
- Αν  $a = -\frac{1}{e}$ , η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα
- Αν  $-\frac{1}{e} < a < 0$  η (1) έχει δυο ακριβώς ρίζες
- Αν  $a \geq 0$  η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα

δ) Για κάθε  $x > 0$  αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα  $[x, x+1]$ , επομένως υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$ , ώστε  $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

αλλά  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ , επομένως  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  οπότε:

$$\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1).$$



## Θέμα 4°

α) Ονομάζουμε  $k = \int_0^2 f(t) dt$ , τότε  $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$

$$\text{Άρα } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [(10x^3 + 3x)k - 45] dx \Leftrightarrow k = k \left[ \frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 - 45[x]_0^2 = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 46k - 90 = k \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 20x^3 + 6x - 45.$$

β) Έχουμε  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$  θέτω  $-h = u$ , τότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x).$$

γ)

$$\text{i. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = \left( \frac{0}{0} \right)^{\text{DH}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} \stackrel{\text{από(β)}}{=} g''(x).$$

Άρα  $g''(x) = f(x) + 45 \Leftrightarrow (g'(x))' = (5x^4 + 3x^2)'$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  ώστε  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c$  και επειδή  $g'(0) = 1$ , τότε  $c = 1$ , δηλαδή  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$  οπότε  $g'(x) = (x^5 + x^3 + x)'$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  ώστε  $g(x) = x^5 + x^3 + x + c$  και επειδή  $g(0) = 1$ , τότε  $c = 1$ , δηλαδή  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ .

ii.  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα

στο  $\mathbb{R}$  επομένως και  $1 - 1$ .