Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής

Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου

Τετάρτη 23 Μαΐου 2012

Θέμα Α

Α1. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.31)

Α2. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.148)

Α3. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.96)

Α4. (α) **Λ** (β) **Σ** (γ) **Λ** (δ) **Σ** (ε) **Σ**

Θέμα Β

Β1. Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων παρατηρούμε ότι η τιμή που αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων είναι δ=25.

Β2. Έχουμε ότι $\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$

Χρόνοι (Λεπτά)	χ_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3. Η μέση τιμή θα είναι $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = \frac{1}{60}(120 + 360 + 720 + 240) = 24$

και η τυπική απόκλιση

$$s = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i} = \sqrt{\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{4}(x_i - 24)^2 \cdot \nu_i} = \sqrt{84} \approx 9.17$$

Β4. Έστω x το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα και λόγω της ομοιόμορφής κατανομής σε κάθε κλάση θα έχουμε

$$\frac{45-37}{45-35} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 8\%$$

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1.

$$\lim_{\chi\to-1}\frac{2(\sqrt{\chi^2+3}-2)}{\chi^2+\chi} = \lim_{\chi\to-1}\frac{2(\sqrt{\chi^2+3}-2)(\sqrt{\chi^2+3}+2)}{\chi(\chi+1)(\sqrt{\chi^2+3}+2)} = \lim_{\chi\to-1}\frac{2(\chi^2-1)}{\chi(\chi+1)(\sqrt{\chi^2+3}+2)} =$$

$$= \lim_{\chi\to-1}\frac{2(\chi-1)(\chi+1)}{\chi(\chi+1)(\sqrt{\chi^2+3}+2)} = \lim_{\chi\to-1}\frac{2(\chi-1)}{\chi(\sqrt{\chi^2+3}+2)} = 1$$

Επομένως το ενδεχόμενο είναι βέβαιο.

Γ2. $P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3\nu+1}{\nu^2+1} = 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu(\nu-3) = 0 \Leftrightarrow \nu = 0 \text{ ή } \nu = 3$$

Επειδή $\nu \geq 3$, έχουμε τελικά $\nu = 3$

Γ3. $P[(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)] = P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma) = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I) =$

$$= \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Γ4. Έχουμε $P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$

<u>**Θέμα Δ**</u>

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \left(\frac{1 + ln^2x}{x}\right)' = \frac{(1 + ln^2x)'x - (1 + ln^2x)x'}{x^2} =$$

$$= \frac{2lnx\frac{1}{x}x - 1 - ln^2x}{x^2} = -\frac{ln^2x - 2lnx + 1}{x^2} = -\frac{(lnx - 1)^2}{x^2} < 0$$, για κάθε $x > 0, \mu\varepsilon\ x \neq e$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+^*$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι θετική σε όλο το πεδίο ορισμού της και $x > 0$.

$$E(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1 + ln^2x}{x} = 1 + ln^2x$$

$$E'(x) = (1 + ln^2x)' = 2lnx \cdot \frac{1}{x}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 2lnx \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

και

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 2lnx \cdot \frac{1}{x} > 0 \overset{\chi>0}{\Longleftrightarrow} lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	**0**	1	$+\infty$
$E'(x)$	-	0	+
$E(x)$	↘		↗

Από το παραπάνω πίνακα μεταβολών συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο για χ=1 και y=1 δηλαδή για τετράγωνο πλευράς 1.

Δ3. Έχουμε ότι $\lambda = f'(1) = -1$ και η ευθεία θα είναι της μορφής $y = -x + \beta$ και για τα σημεία (x_i, y_i) εφόσον ανήκουν στην ευθεία θα ικανοποιούν την εξίσωση της, δηλ.

$$y_i = -x_i + \beta$$

$$\bar{y} = -\bar{x} + \beta = -10 + \beta \Leftrightarrow S_y = |-1|S_x = S_x = 2$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει $CV_y \leq 0.1$

$$CV_y = \frac{S_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{|\beta - 10|} \leq 0.1 \Leftrightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \geq 20 \text{ ή } \beta - 10 \leq -20$$

$$\Leftrightarrow \beta \geq 30 \text{ ή } \beta \leq -10$$

Δ4. Επειδή $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$$

Ακόμη έχουμε $A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A \cup B) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow f(P((A \cap B))) \geq f(P(A \cup B))$$

Εάν προσθέσουμε τις δυο παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι:

$$f(P(A)) + f(P((A \cap B))) \geq 2f(P(A \cup B))$$

που είναι και το ζητούμενο.