Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής

Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου

Σάββατο 14 Μαΐου 2011

Θέμα Α

Α1. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.152)

Α2. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.142)

Α3. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.65)

Α4. (α) **Λ** (β) **Λ** (γ) **Σ** (δ) **Λ** (ε) **Σ**

Θέμα Β

Β1. Η πιθανότητα η σφαίρα να είναι μαύρη είναι:

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega) = 4 \cdot N(M)$$

και εφόσον γνωρίζουμε ότι $64 < N(\Omega) < 72$, εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $N(\Omega) = 68$.

Β2. Έχουμε ότι $\mathrm{P(A)} + \mathrm{P(K)} + \mathrm{P(M)} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ ή $\lambda = 1$

Δεκτή είναι μόνο η τιμή $\lambda = \frac{1}{4}$ διότι για $\lambda = 1$ προκύπτει $\mathrm{P(A)} = 4$, η οποία δεν είναι αποδεκτή τιμή για πιθανότητα.

Β3. Έχουμε $P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(M)=\frac{68}{4}=17$

και $P(A)=\frac{4}{16}\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(A)=\frac{68}{4}=17$

$$P(K)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow N(K)=\frac{68}{2}=34$$

Β4. Τα ενδεχόμενα Α,Μ είναι ασυμβίβαστα επομένως

$P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

Θέμα Γ

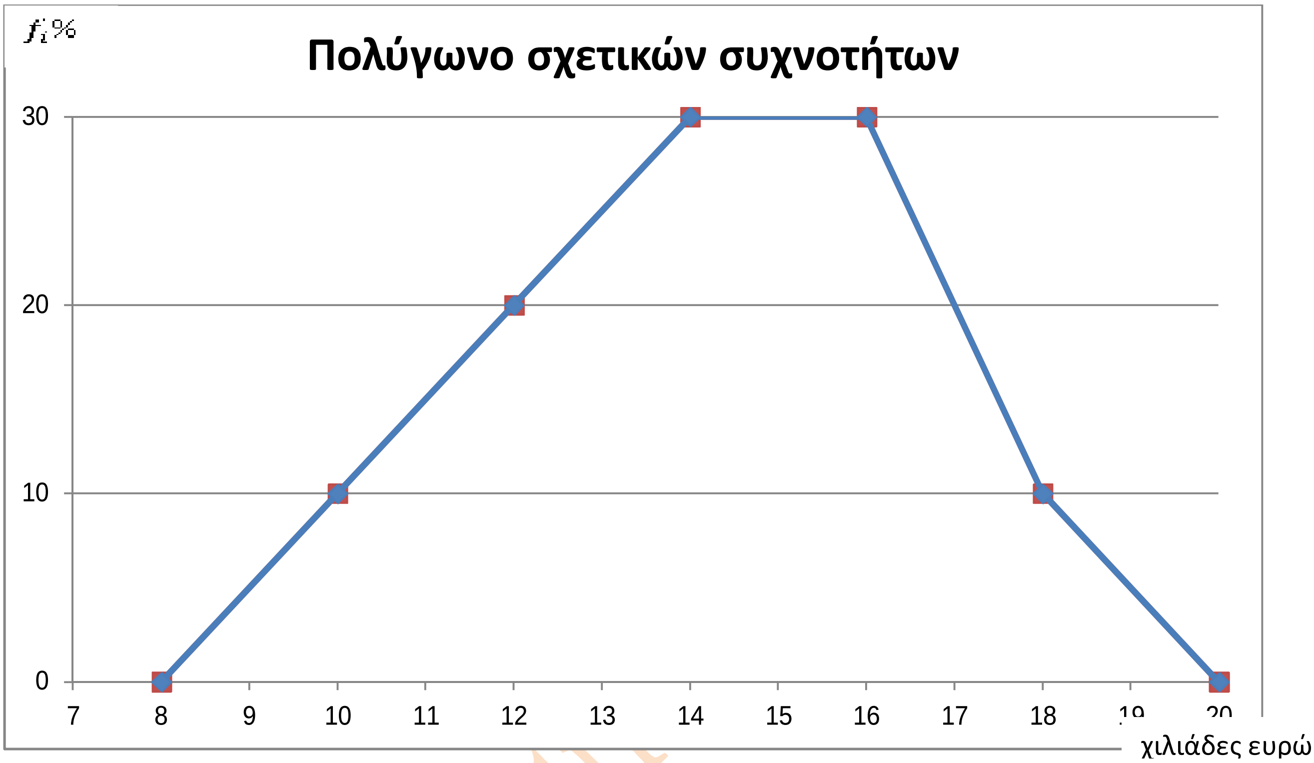
Γ1. Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στον οριζόντιο άξονα, επομένως θα ισχύει $y_E=y_\Delta$

και υπολογίζοντας την μέση τιμή θα έχουμε

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot f_i=10\cdot 0.1+12\cdot 0.2+12\cdot 0.2+y_\Delta\cdot 0.14+y_E\cdot 0.16+18\cdot 0.1=$$

$$=14.2\overset{y_E=y_\Delta}{\Longleftrightarrow}y_\Delta=30=y_E$$

Γ2.



Γ3.

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές**	**Σχετικές συχνότητες $f_i\%$**
[9,11)	10	10
[11,13)	12	20
[13,15)	14	30
[15,17)	16	30
[17,19)	18	10
Σύνολο		100

Γ4. Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι οι πωλητές που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό είναι οι δυο τελευταίες κλάσεις δηλ 40%.

Γ5. Έχουμε ν=80, επομένως ο αριθμός των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό θα είναι 80·40%=32

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων.

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\right)' = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right)$$

και λύνοντας την εξίσωση $f'(x) = 0$ έχουμε

$$e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{2}{5}$$

x	$-\infty$	1/3	2/5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{5}, -\infty]$ και γν. φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$

Δ2. $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \leq P(B)$ και σε συνδυασμό των αποτελεσμάτων του προηγούμενου ερωτήματος εύκολα συμπεραίνουμε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Επίσης $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ και $A \cup B = B$

Έτσι έχουμε $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$

Ακόμη $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Δ3.

α) $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} = h(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) - 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(10x^2 - 11x + 4 - 9x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3$$

β) Εφόσον $x_1 < x_2 < x_3$ θα είναι $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

και σύμφωνα με την εκφώνηση θα ισχύουν

$$\nu_1 = 2x_1 + 1 = 1$$

$$\nu_2 = 2x_2 + 1 = 5$$

$$\nu_3 = 2x_3 + 1 = 7$$

και η μέση τιμή θα δίνεται από τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{1 + 5 + 7} = \frac{31}{13}$$