Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής

Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου

Δευτέρα 17 Μαΐου 2010

Θέμα Α

Α1. Ο Αριθμητικός Μέσος θα δίνεται από την γνωστή σχέση:

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\cdots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{t_1+t_2+..+t_\nu}{\nu}-\frac{\nu\bar{x}}{\nu}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

Α2. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.86-87)

Α3. Θεωρία (Σχ.Βιβλίο σελ.140)

Α4. (α)- Σ (β)- Λ (γ)- Σ (δ)- Λ (ε)- Λ

Θέμα Β

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι όλο το $\mathbb{R}$ διότι $\chi^2-\chi+1>0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

Β1. Για $\chi\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{\sqrt{\chi^2-\chi+1}-1-1}{x-1}=\frac{2(\sqrt{\chi^2-\chi+1}-1)}{x-1}=\frac{2(\sqrt{\chi^2-\chi+1}-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}{(x-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}=$$

$$\frac{2(\chi^2-\chi+1-1)}{(x-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}=\frac{2(\chi^2-\chi)}{(x-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}=\frac{2x(\chi-1)}{(x-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}=\frac{2x}{(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}$$

Επομένως το ζητούμενο όριο θα είναι

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{\chi\to 1}\frac{2x}{(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)}=1$$

Β2. $f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{\chi^2-\chi+1}}(\chi^2-\chi+1)'=\frac{2x-1}{\sqrt{\chi^2-\chi+1}}$

Ο ζητούμενος συντελεστής διεύθυνσης θα ισούται με $f'(0)=\frac{2\cdot 0-1}{\sqrt{0^2-0+1}}=-1$

Β3. Για την ζητούμενη γωνία $\omega\in[0,\pi)$ θα ισχύει $\varepsilon\varphi\omega=f'(0)=-1$ επομένως $\omega=\frac{3\pi}{4}$

Θέμα Γ

Γ1. Έστω c το πλάτος κάθε κλάσης τότε οι κλάσεις μου θα είναι [0-c), [c-2c), [2c-3c), [3c-4c) και [4c-5c), γνωρίζουμε ότι το κέντρο της 2ης κλάσης ισούται με 6 άρα $\frac{c+2c}{2}=6\Leftrightarrow$ $c=4$

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ χ_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0-4)	2	20
[4-8)	6	40
[8-12)	10	45
[12-16)	14	30
[16-20)	18	25
Σύνολο		160

$$Μέση\ τιμή : \bar{\chi} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i = \frac{1}{160}(2\cdot 20 + 6\cdot 40 + 10\cdot 45 + 14\cdot 30 + 18\cdot 25)$$
$$= 10\ κιλά$$

$$Τυπικη\ απόκλιση :\ s = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} \nu_i\,(x_i - \bar{\chi})^2} = \cdots = 5$$

Γ3. Ο συντελεστής μεταβλητότητας δίνεται από την σχέση : $CV = \frac{s}{\bar{\chi}} = \frac{5}{10} = 50\% > 10\%$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. Θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις μας κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση, θα έχουμε ότι στο διάστημα [7,8) θα υπάρχει το ¼ των ατόμων που υπάρχουν στην κλάση [4,8) δηλαδή 10 άτομα. Για τον ίδιο λόγο θα έχουμε στο διάστημα [12,14) 15 άτομα και στο διάστημα [8,12) 45 άτομα. Άρα συνολικά έχουμε 70 άτομα. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$

Θέμα Δ

Δ1. Η πρώτη παράγωγος θα είναι $f'(x) = \left(\ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B)\right)' =$

$$= \frac{1}{x - P(A)} - \left(x - P(A)\right) = \frac{1 - \left(x - P(A)\right)^2}{x - P(A)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)} = 0 \Leftrightarrow 1 - (x - P(A))^2 = 0 \Leftrightarrow (x - P(A))^2 = 1 \Leftrightarrow x - P(A)$$
$$= 1\ (διότι\ \chi > P(A))\ \Leftrightarrow x = P(A) + 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < P(A) + 1$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(P(A), 1+P(A)]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1+P(A), +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $\chi = 1+P(A)$ το $f(1+P(A)) = \ln\left(1+P(A) - P(A)\right) - \frac{1}{2}\left(1+P(A) - P(A)\right)^2 + P(B) = P(B) - \frac{1}{2}$

x	P(A) P(A)+1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

Δ2. Από το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε ότι $1+P(A) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

και $P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

Δ3. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$

Δ4. Σε αυτή την περίπτωση η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P\left((A-B) \cup (B-A)\right) = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = .. = \frac{1}{2}$