Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις

Μονώνυμο του χ καλείται κάθε παράσταση της μορφής $\alpha\chi^{\nu}$ με $\alpha \in \mathbb{R}\,, \nu \in \mathbb{N}^{*}$.

Μονώνυμο του χ καλείται επίσης και κάθε πραγματικός αριθμός.

Πολυώνυμο του χ καλείται κάθε παράσταση της μορφής

$\alpha_{\nu}\chi^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0$ με $\alpha_i \in \mathbb{R}\ (i = 0,1,..\nu), \nu \in \mathbb{N}$.

- **Όροι**: Ονομάζονται τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}\chi^{\nu}, \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}, \dots, \alpha_1\chi, \alpha_0$
- **Συντελεστές**: Ονομάζονται οι αριθμοί $\alpha_{\nu}, \alpha_{\nu-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$
- **Σταθερός όρος**: Είναι ο όρος α_0
- **Βαθμός πολυώνυμου**: Είναι το ν εάν $\alpha_{\nu} \neq 0$
- **Σταθερό πολυώνυμο**: Ονομάζονται όλοι οι πραγματικοί αριθμοί (πολυώνυμο της μορφής α_0). Εάν $\alpha_0 \neq 0$ τότε ο βαθμός του σταθερού πολυωνύμου είναι μηδέν.
- **Μηδενικό πολυώνυμο**: Ονομάζεται το σταθερό πολυώνυμο 0 για το οποίο <u>δεν</u> ορίζεται βαθμός.

Έστω δυο πολυώνυμα $P(x) = \alpha_{\nu}\chi^{\nu} + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0$

και $Q(x) = \beta_{\kappa}\chi^{\kappa} + \beta_{\kappa-1}\chi^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1\chi + \beta_0$ με $\nu \geq \kappa$ θα λέμε ότι είναι **ίσα** αν και μόνο αν είναι του ιδίου βαθμού και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι. Δηλαδή ισχύει $\alpha_0 = \beta_0\,, \alpha_1 = \beta_1\,, \dots, \alpha_{\nu} = \beta_{\nu}$ και

$\alpha_{\kappa+1} = \alpha_{\kappa+2} = \dots = \alpha_{\nu} = 0$

- **Αριθμητική τιμή** του πολυωνύμου $P(x)$ για $\chi = \rho$ είναι ο πραγματικός αριθμός

$$P(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$$

- **Ρίζα** του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ο πραγματικός αριθμός ρ τέτοιος ώστε $P(\rho) = 0$

Ταυτότητα διαίρεσης

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(\chi)$ και $\delta(\chi)$ με $\delta(\chi) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(\chi)$ και $\upsilon(\chi)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(\chi) = \delta(\chi) \cdot \pi(\chi) + \upsilon(\chi)$$

όπου το $\upsilon(\chi)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(\chi)$.

Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $\chi - \rho$ είναι ίσο με το $P(\rho)$. Δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$

Θεώρημα

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $\chi - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$. Δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$

Σχήμα Horner

Είναι ένας τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $\chi - \rho$ και να βρούμε την τιμή $P(\rho)$.

Θεώρημα (ακεραίων ριζών)

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 \chi + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης , τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

- Τις ακέραιες ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές τις αναζητούμε στο σύνολο των διαιρετών του σταθερού όρου α_0