Εξισώσεις 2ου βαθμού

Εξισώσεις 2ου βαθμού

Η εξίσωση της μορφής $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\,, \alpha \neq 0$ λύνεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

$\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$	**Η εξίσωση** $\boldsymbol{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\,, \alpha \neq 0}$
αν Δ>0	έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες: $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
αν Δ=0	έχει μια ρίζα διπλή: $\chi_1 = \frac{-\beta}{2\alpha}$
αν Δ<0	δεν έχει πραγματικές ρίζες

- Όταν β=0 ή γ=0 , τότε η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0\,, \alpha \neq 0$ εκφυλίζεται σε απλούστερη μορφή και μπορεί να λυθεί χωρίς την χρήση της διακρίνουσας.

Αναλυτικά Παραδείγματα:

1) Έστω η 2ου βαθμού εξίσωση $\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$ (1)

   Το πρώτο που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την διακρίνουσα Δ έχοντας υπόψη ότι για την συγκεκριμένη άσκηση το α=1 , β=-5 και γ=6. Έτσι λοιπόν θα έχουμε $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$>0.

Εφόσον η διακρίνουσα Δ είναι μεγαλύτερη από το 0 , η εξίσωση (1) θα έχει δυο πραγματικές άνισες ρίζες, τις οποίες θα τις βρούμε εφαρμόζοντας τον τύπο

$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Έτσι καταλήγουμε στις δυο λύσεις της εξίσωσης, οι οποίες είναι οι $\chi_1 = 3$ και $\chi_2 = 2$.

2) Έστω η 2^ου^ βαθμού εξίσωση $\chi^2 - 2\chi + 1 = 0$ (2)

Το πρώτο που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την διακρίνουσα Δ έχοντας υπόψη ότι για την συγκεκριμένη άσκηση το α=1 , β=-2 και γ=1. Έτσι λοιπόν θα έχουμε $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$. Εφόσον η διακρίνουσα Δ είναι ίση με το 0 , η εξίσωση (2) θα έχει μια διπλή ρίζα, την οποία θα υπολογίσουμε εφαρμόζοντας τον τύπο $\chi_1 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-2)}{2} = 1$

Έτσι καταλήγουμε στη μοναδική λύση $\chi_1 = 1$ την οποία θα μπορούσαμε να την είχαμε βρει και με έναν άλλο τρόπο, η εξίσωση (2) μπορεί να γραφεί $(\chi - 1)^2 = 0$ (γνωστή ταυτότητα) επομένως προκύπτει εύκολα ότι η ρίζα της τελευταίας εξίσωσης είναι η χ=1.

3) Έστω η 2^ου^ βαθμού εξίσωση $\chi^2 + 3\chi + 6 = 0$ (3)

Το πρώτο που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε την διακρίνουσα Δ έχοντας υπόψη ότι για την συγκεκριμένη άσκηση το α=1 , β=3 και γ=6. Έτσι λοιπόν θα έχουμε $\Delta = (3)^2 - 4(1)(6) = 9 - 24 = -15$<0. Εφόσον η διακρίνουσα Δ είναι μικρότερη από το 0 , η εξίσωση (1) δεν θα έχει πραγματικές ρίζες.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

Εάν χ_1 και χ_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0\,,\alpha\neq 0$ τότε το άθροισμα των ριζών S δίνεται από τον τύπο:

$$S=\chi_1+\chi_2=-\frac{\beta}{\alpha}$$

και το γινόμενο των ριζών P δίνεται από τον τύπο:

$$P=\chi_1\cdot\chi_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Οι παραπάνω τύποι ονομάζονται **τύποι Vieta** (από τον Γάλλο Μαθηματικό ***Francisc us Vieta (1540-1603)***)με την βοήθεια των οποίων η εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\chi^2-S\chi+P=0$$

Εξισώσεις και Συστήματα που ανάγονται σε λύση εξισώσεων 2ου βαθμού.

Κάποιες ομάδες εξισώσεων μπορούν με κατάλληλες αντικαταστάσεις ή μετασχηματισμούς να αναχθούν σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

- Μια τέτοια ομάδα είναι οι **κλασματικές εξισώσεις** στις οποίες αφού προσδιορίσουμε τους περιορισμούς που πιθανόν να υπάρχουν (λόγω παρανομαστών) κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών με το Ε.Κ.Π και στην συνέχεια μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και όταν επιλύσουμε την εξίσωση που προκύπτει ελέγχουμε τις λύσεις σύμφωνα με τους περιορισμούς που είχαμε από την αρχική εξίσωση.
- Μια άλλη ομάδα χαρακτηριστικών εξισώσεων είναι οι **διτετράγωνες** οι οποίες έχουν γενική μορφή $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0\,,\alpha\neq 0$, οι οποίες επιλύονται θέτοντας $x^2=y\;(y\geq 0)$ με αποτέλεσμα να μετασχηματίζονται σε εξισώσεις της μορφής $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0\,,\alpha\neq 0$, όπου λύνουμε ως προς y και στην συνέχεια ως προς χ σύμφωνα με την αντικατάσταση $x^2=y$ και αφού έχουμε επιλέξει μόνον τα y για τα οποία ισχύει $y\geq 0$.

Αναλυτικά Παραδείγματα:

1) Έστω η ***κλασματική*** εξίσωση $\frac{1}{\chi^2+3\chi+2}-\frac{1}{\chi+1}-\frac{\chi+1}{2(\chi+2)}=0$ (1)

Η εξίσωση (1) μετά την παραγοντοποίηση του πρώτου όρου θα γίνει

$\frac{1}{(\chi+1)(\chi+2)}-\frac{1}{\chi+1}-\frac{\chi+1}{2(\chi+2)}=0$. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το **Ε.Κ.Π.** της παραπάνω παράστασης το οποίο είναι $2(\chi+1)(\chi+2)$. Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δίνεται στους περιορισμούς, οι οποίοι στην συγκεκριμένη άσκηση είναι $\chi+1\neq 0 \; \kappa\alpha\iota \; \chi+2\neq 0 \Leftrightarrow \chi\neq -1 \; \kappa\alpha\iota \; \chi\neq -2$.

Το επόμενο βήμα είναι η **Απαλοιφή παρανομαστών** :

$$2(\chi+1)(\chi+2)\frac{1}{(\chi+1)(\chi+2)}-2(\chi+1)(\chi+2)\frac{1}{\chi+1}$$

$$-2(\chi+1)(\chi+2)\frac{\chi+1}{2(\chi+2)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-2(\chi+2)-(\chi+1)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-2\chi-4-\chi^2-2\chi-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi^2+4\chi+3=0\Leftrightarrow \chi_1=-1 \; \acute{\eta} \; \chi_2=-3$$

Αλλά σύμφωνα με τους περιορισμούς που έχουμε παραπάνω το χ δεν μπορεί να πάρει την τιμή -1 , αρά καταλήγουμε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) είναι το $\chi=-3$.

2) Έστω η **διτετράγωνη** εξίσωση $\chi^4 - 5\chi^2 - 36 = 0$ (1)

Αν θέσουμε $y = x^2$ με $y \geq 0$ η δοθείσα εξίσωση θα γίνει $y^2 - 5y - 36 = 0$, η οποία θα λυθεί κανονικά ως δευτεροβάθμια εξίσωση και θα προκύψουν δυο λύσεις $y_1 = 9$ ή $y_2 = -4$. Σύμφωνα με τον περιορισμό που έχουμε για το $y \geq 0$, μόνο η πρώτη λύση γίνεται δεκτή ενώ η δεύτερη απορρίπτεται. Τελικά οι ρίζες της εξίσωσης (1) θα είναι $y = x^2 = 9 \Leftrightarrow \chi_1 = -3$ ή $\chi_1 = 3$.